

ESERCIZI UNITA' C – SOMMARIO

- C. PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA E SISTEMI CHIUSI**
- C.I. Trasformazione isocora di gas ideale**
- C.II. Trasformazione isocora di gas ideale: vano congelatore**
- C.III. Trasformazione isocora di gas ideale: cabinet per apparecchiature elettroniche**
- C.IV. Trasformazione isoterma di gas ideale**
- C.V. Trasformazione isobara di gas ideale**
- C.VI. Trasformazione isobara di gas reale**
- C.VII. Trasformazione politropica di gas ideale**
- C.VIII. * Ciclo chiuso di un gas ideale**
- C.IX. * Ciclo chiuso di un gas ideale (2)**
- C.X. Calore specifico di un materiale solido**
- C.XI. Calore specifico di solidi e liquidi**
- C.XII. Calore specifico di solidi e liquidi e calore latente di fusione**
- C.XIII. Calore specifico di solidi e liquidi e calore latente di fusione: bibita con ghiaccio**

C.I. Trasformazione isocora di gas ideale

– Problema

Una quantità di aria secca con massa 55 g, pressione iniziale 1.00 bar e temperatura iniziale 27°C, contenuta in un recipiente chiuso e indeformabile, viene riscaldata fino ad una temperatura di 200°C.

Determinare il volume e la pressione finale dell'aria, assimilandola ad un gas ideale (o perfetto). Inoltre, calcolare il lavoro e il calore scambiati durante la trasformazione, assumendo che il valore del calore specifico a volume costante dell'aria non vari significativamente con la temperatura e sia circa pari a 0.73 kJ/(kg·K).

– Dati

Sostanza: aria secca

$$m = 55 \text{ g} = 0.055 \text{ kg}$$

$$p_1 = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$$

recipiente chiuso e indeformabile $\Rightarrow 1 \rightarrow 2$) Trasformazione isocora $\Rightarrow V_2 = V_1$

$$T_2 = 200^\circ\text{C} = 473 \text{ K}$$

$$c_v = 0.73 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 730 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

– Determinare

Volume finale (V_2), pressione finale (p_2), lavoro scambiato (L_{12}), calore scambiato (Q_{12}).

– Ipotesi

Recipiente perfettamente chiuso ed indeformabile, gas ideale.

– Soluzione

La trasformazione è, evidentemente isocora: il volume del recipiente, chiuso e indeformabile, in cui l'aria è contenuta non varia durante il riscaldamento. Pertanto, il volume iniziale dell'aria stessa è pari al volume finale, e lo stesso vale per i volumi specifici iniziale e finale.

La costante di gas perfetto dell'aria secca si ricava da tabella:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

Il volume specifico iniziale (stato 1), coincidente con quello finale, si ricava mediante l'equazione di stato:

$$v_1 \equiv v_2 = RT_1 / p_1 = 0.861 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Il volume totale vale:

$$V_1 \equiv V_2 = mv_1 = 0.047 \text{ m}^3$$

La pressione finale (stato 2) è pari a:

$$p_2 = RT_2 / v_2 = 158 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 158 \text{ kPa}$$

Per ciò che concerne il lavoro ed il calore scambiati, il primo principio della termodinamica permette di scrivere la seguente equazione:

$$\Delta u_{12} = q_{12} - \ell_{12} = q_{12} - \int_{v_1}^{v_2} p dv$$

ovvero

$$\Delta U_{12} = Q_{12} - L_{12} = Q_{12} - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Essendo nulla la variazione di volume (specifico e totale), il lavoro scambiato di tipo meccanico (l'unico possibile in un sistema semplice) è necessariamente nullo. Non è invece nullo il calore scambiato. A tal riguardo, il calore specifico a volume costante è definito come segue:

$$c_v = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_{v=\text{cost}}$$

Per un gas ideale, la cui energia interna (specifico e totale) dipende solo dalla temperatura, si desume che:

$$c_v = \frac{du}{dT} \Rightarrow \Delta U_{12} = m\Delta u_{12} = m \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT$$

Essendo costante per ipotesi il c_v dell'aria (tale approssimazione è in generale accettabile per variazioni ridotte di temperatura, se si utilizza il valore medio di c_v nell'intervallo di variazione), il calore complessivamente scambiato durante la trasformazione in esame si può valutare come segue:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = m \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT \cong m c_{v,\text{medio}} (T_2 - T_1) = 6946 \text{ J} = 6.9 \text{ kJ}$$

Come logico, il calore è positivo, quindi fornito all'aria.

– Commenti

Essendo la pressione sempre molto inferiore a quella di punto critico, pari a 3.77 MPa, l'aria può essere assimilata ad un gas ideale durante tutta la trasformazione.

I calori specifici a pressione costante e a volume costante dipendono in generale dalla temperatura, ma in presenza di escursioni termiche limitate si possono assumere costanti e pari al loro valore medio nell'intervallo di variazione.

C.II. Trasformazione isocora di gas ideale: vano congelatore

– Problema

Lo scomparto congelatore di un frigorifero domestico presenta dimensioni interne 50 cm x 30 cm x 40 cm (larghezza x altezza x profondità). Durante le operazioni di riempimento, negli spazi vuoti del vano si va ad inserire aria in condizioni ambiente (valori tipici in un'abitazione: temperatura 25°C, pressione 1 bar). Una volta chiuso il portello, la temperatura dell'aria si porta rapidamente al valore di esercizio del vano (ad esempio, -18°C per un congelatore ***). Per effetto di tale raffreddamento si ha che, se le guarnizioni di tenuta del portello mantengono il vano ben sigillato, la pressione dell'aria al suo interno scende al di sotto del valore ambiente.

Assumendo che il vano venga riempito per il 25% del volume da alimenti congelati, determinare la pressione che si instaura al suo interno dopo che l'aria, da considerarsi secca, si è completamente raffreddata.

– Dati

Sostanza: aria secca

$$L_1 = 50 \text{ cm} = 0.50 \text{ m (larghezza)}$$

$$L_2 = 30 \text{ cm} = 0.30 \text{ m (altezza)}$$

$$L_3 = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m (profondità)}$$

$$r = 25\% = 0.25 \text{ (frazione di riempimento)}$$

$$p_1 \equiv p_{\text{atm}} = 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 \equiv T_{\text{atm}} = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$$

$$T_2 = -18^\circ\text{C} = 255 \text{ K}$$

– Determinare

Pressione finale (p_2).

– Ipotesi

Vano congelatore perfettamente sigillato, pareti del vano indeformabili, aria gas ideale.

– Soluzione

Poiché, dopo la chiusura, la configurazione interna del vano congelatore non varia, la trasformazione può essere considerata isocora. Il volume della parte di vano occupata dall'aria si calcola come segue:

$$V_1 \equiv V_2 = (1 - r)L_1L_2L_3 = (1 - 0.25) \cdot 0.50 \cdot 0.30 \cdot 0.40 = 0.045 \text{ m}^3$$

Se l'aria non trafile attraverso le guarnizioni, il vano può essere considerato un sistema chiuso. La massa di aria al suo interno può essere calcolata mediante l'equazione di stato dei gas ideali, in cui si introducono i valori iniziali (stato 1) delle proprietà termodinamiche e la costante di gas perfetto R, che per l'aria è pari a 287.0 J/(kg·K):

$$m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{100000 \cdot 0.045}{287.0 \cdot 298} = 0.0526 \text{ kg}$$

Sempre mediante l'equazione di stato è possibile stimare la pressione finale (stato 2) dell'aria:

$$p_2 = \frac{mRT_2}{V_2} = \frac{0.0526 \cdot 287 \cdot 255}{0.045} = 85578 \text{ Pa} = 0.86 \text{ bar}$$

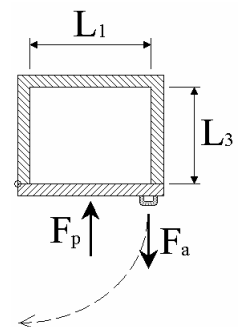
– Commenti

La forza risultante delle pressioni sul portello frontale del vano congelatore, F_p , è data dal bilancio delle forze di pressione esterne ed interne. Dalla definizione di pressione (forza normale per unità di superficie) si desume:

$$F_p = p_{\text{atm}} \cdot L_1 \cdot L_2 - p_2 \cdot L_1 \cdot L_2 = (p_1 - p_2) \cdot L_1 \cdot L_2 = 2163 \text{ N}$$

La forza F_p si può considerare applicata nel baricentro del portello. Supponendo che la maniglia di apertura sia posta all'estremità laterale del portello, si verifica facilmente che il momento della forza da esercitare sulla maniglia, F_a , deve vincere il momento della risultante delle forze di pressione:

$$F_a L_1 = F_p L_1 / 2$$



Da ciò si ricava che la forza F_a vale:

$$F_a = F_p / 2 = 1082 \text{ N} = 1.1 \text{ kN}$$

Lo sforzo è considerevole: quand'anche si riuscisse ad applicarlo, si andrebbero a sollecitare notevolmente i cardini del portello (che, per garantire l'equilibrio alla traslazione, sono soggetti ad una forza uguale a quella applicata alla maniglia). Fortunatamente, il portello non è mai a perfetta tenuta e la depressione interna riesce a richiamare aria dall'esterno, attraverso le fessure tra le guarnizioni, finché la pressione interna non torna uguale al valore atmosferico. È tuttavia esperienza comune che, per qualche tempo dopo la chiusura, la riapertura di un vano congelatore risulta difficoltosa.

C.III. Trasformazione isocora di gas ideale: cabinet per apparecchiature elettroniche

– Problema

Un cabinet per apparecchiature elettroniche è costituito da un vano sigillato con dimensioni interne 450 mm x 1500 mm x 400 mm (larghezza x altezza x profondità). All'interno del vano si trovano apparecchiature elettroniche con sviluppo volumetrico e capacità termica trascurabili, alimentate in corrente continua e con tensione di alimentazione 12 V. Tali apparecchiature assorbono 11.6 A in condizioni di carico massimo. Al momento dell'avviamento, il vano è occupato da aria in condizioni ambiente tipiche (temperatura 25°C, pressione 1 bar).

Determinare in quanto tempo si raggiungerebbe la massima temperatura ammissibile dall'elettronica, pari a 80°C, in condizioni di carico massimo.

– Dati

Sostanza: aria secca

$$L_1 = 450 \text{ mm} = 0.450 \text{ m (larghezza)}$$

$$L_2 = 1500 \text{ mm} = 1.500 \text{ m (altezza)}$$

$$L_3 = 400 \text{ mm} = 0.400 \text{ m (profondità)}$$

$$p_1 = 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 \equiv T_{\text{amb}} = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$$

$$T_2 \equiv T_{\text{max}} = 80^\circ\text{C} = 353 \text{ K}$$

$$\Delta V_{\text{cc}} = 12 \text{ V}$$

$$I_{\text{cc}} = 11.6 \text{ A}$$

– Determinare

Tempo di raggiungimento della temperatura massima ammissibile (t_{12}).

– Ipotesi

Cabinet sigillato e con pareti indeformabili, aria gas ideale, sviluppo volumetrico e capacità termica delle apparecchiature elettroniche trascurabili.

– Soluzione

Poiché le pareti del cabinet sono indeformabili, il volume interno non varia dopo la chiusura. Pertanto, se l'aria non trafile attraverso le guarnizioni, il cabinet è assimilabile ad un sistema chiuso e l'aria in esso contenuta subisce una trasformazione isocora.

Lo sviluppo volumetrico delle apparecchiature elettroniche alloggiate nel cabinet è trascurabile, perciò il volume interno occupato dall'aria si può stimare come segue:

$$V_1 \equiv V_2 \equiv L_1 L_2 L_3 = 0.270 \text{ m}^3$$

La massa dell'aria può essere calcolata mediante l'equazione di stato dei gas ideali, in cui si introducono i valori iniziali (stato 1) delle proprietà termodinamiche e la costante di gas perfetto $R = 287.0 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ dell'aria (secca):

$$m = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = \frac{100000 \cdot 0.045}{287.0 \cdot 298} = 0.316 \text{ kg}$$

Data la variazione di temperatura relativamente limitata, per il calore specifico a volume costante dell'aria si può assumere un valore pari a circa $720 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ costanti (valore medio nell'intervallo di variazione della temperatura). Si può così ricavare il calore assorbito dall'aria per portare la sua temperatura al valore massimo tollerabile dall'elettronica (stato 2) sulla base del primo principio della termodinamica (con lavoro nullo in quanto è nulla la variazione di volume):

$$\begin{aligned} Q_{12} = \Delta U_{12} = m \Delta u_{12} &= m \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT \approx m c_{v,\text{medio}} (T_2 - T_1) = \\ &= 0.316 \cdot 720 \cdot (353 - 298) = 12495 \text{ J} = 12.5 \text{ kJ} \end{aligned}$$

La potenza termica dissipata dalle apparecchiature elettroniche in condizioni di carico massimo può essere stimata come segue:

$$\dot{Q} = \Delta V_{cc} I_{cc} = 12 \cdot 11.6 = 139 \text{ W}$$

Assumendo che le pareti siano adiabatiche, l'unica sorgente con cui l'aria nel cabinet scambia calore è costituita dalle apparecchiature elettroniche. Pertanto, il tempo in cui si raggiungerebbe nel cabinet la temperatura massima ammissibile può essere stimato come segue:

$$t_{12} = Q_{12} / \dot{Q} = 89.8 \text{ s} \approx 1.5 \text{ min}$$

– Commenti

Le pareti non sono in realtà adiabatiche. Tuttavia, la potenza scambiata attraverso di esse per conduzione e convezione è limitata, per cui è quasi sempre opportuno ventilare l'interno del cabinet.

C.IV. Trasformazione isoterma di gas ideale

– Problema

Aria con stato iniziale caratterizzato da volume occupato 110 dm^3 , pressione 1.00 bar e temperatura 40°C subisce una compressione isoterma, al termine della quale il volume occupato si è ridotto a 11 dm^3 .

Determinare la massa, la densità iniziale e la pressione finale dell'aria. Inoltre, calcolare il lavoro e il calore scambiati durante la trasformazione.

– Dati

Sostanza: aria secca

$$V_1 = 110 \text{ dm}^3 = 0.110 \text{ m}^3$$

$$p_1 = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \rightarrow 2) \text{ Trasformazione isoterma} \Rightarrow T_2 = T_1$$

$$T_1 \equiv T_2 = 40^\circ\text{C} = 313 \text{ K}$$

$$V_2 = 11 \text{ dm}^3 = 0.011 \text{ m}^3$$

$$c_p = 1.006 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 1006 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

– Determinare

Massa (m), densità iniziale (ρ_1) e pressione finale (p_2) dell'aria, lavoro (L_{12}) e calore (Q_{12}) scambiati durante la trasformazione.

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

La costante di gas perfetto dell'aria secca si ricava da tabella:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

La massa si ricava tramite l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 0.122 \text{ kg}$$

La densità massica iniziale (stato 1) si ricava attraverso la sua definizione:

$$\rho_1 = m / V_1 = 1.113 \text{ kg} / \text{m}^3$$

La pressione finale (stato 2) si ricava anch'essa tramite l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_2 = mRT_2 / V_2 = 1.0 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ bar}$$

Il lavoro complessivamente scambiato durante la trasformazione (isoterma) è pari a:

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{mRT}{V} \right) dV = mRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -25328 \text{ J} = -25 \text{ kJ}$$

Il risultato numerico è negativo in quanto il lavoro è fornito al fluido (lavoro di compressione).

L'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla sua temperatura. Pertanto, essendo la trasformazione isoterma, l'energia interna della quantità di aria considerata non varia ($\Delta U_{12}=0$). Dal primo principio si ottiene quindi che il calore scambiato vale:

$$Q_{12} = L_{12} = -25 \text{ kJ}$$

Il calore è negativo in quanto ceduto dal fluido. Per mantenere l'aria a temperatura costante, è quindi necessario raffreddarla.

– Commenti

Le condizioni di pressione e temperatura sono tali che l'aria può considerarsi un gas ideale durante tutta la trasformazione.

C.V. Trasformazione isobara di gas ideale

– Problema

Una quantità di aria, inizialmente contenuta in un volume di 24 L a pressione di 1 bar e a temperatura 300 K, subisce una trasformazione isobara, al termine della quale si viene a trovare a temperatura 800 K.

Determinare la massa dell'aria, assimilandola ad un gas ideale. Inoltre, calcolare il lavoro ed il calore scambiati durante la trasformazione, assumendo che il calore specifico a pressione costante dell'aria non vari significativamente con la temperatura e che il suo valore sia pari a 1.052 kJ/(kg·K).

– Dati

Sostanza: aria (secca)

$$V_1 = 24 \text{ L} = 0.024 \text{ m}^3$$

$$T_1 = 300 \text{ K}$$

1→2) Trasformazione isobara $\Rightarrow p_2 = p_1$

$$p_1 \equiv p_2 = 1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_2 = 800 \text{ K}$$

$$c_p = 1.052 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 1052 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

– Determinare

Massa (m), lavoro (L_{12}) e calore (Q_{12}) scambiati.

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

Si può verificare agevolmente che i valori di temperatura e pressione dell'aria sono compatibili con l'ipotesi di gas ideale.

La costante di gas perfetto dell'aria si ricava da tabella:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

La massa dell'aria si ricava tramite l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{100000 \cdot 0.024}{287.0 \cdot 300} = 0.0279 \text{ kg}$$

Per determinare il lavoro scambiato durante la trasformazione, occorre prima determinare il volume finale. Anche questo si ricava mediante l'equazione di stato:

$$V_2 = \frac{mRT_2}{p_2} = \frac{0.0279 \cdot 287.0 \cdot 800}{100000} = 0.064 \text{ m}^3$$

Il fluido subisce dunque un'espansione. Il lavoro scambiato durante la trasformazione (isobara) vale:

$$L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 (V_2 - V_1) = 100000 \cdot (0.064 - 0.024) = 4000 \text{ J} = 4.0 \text{ kJ}$$

Il risultato è positivo, perciò il lavoro è ceduto dal fluido.

Per stimare il calore scambiato durante la trasformazione, va rammentato che il calore specifico a pressione costante è definito come segue:

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_{p=\text{cost}}$$

Per un gas ideale, la cui entalpia (specifica e totale) dipende solo dalla temperatura e non dalla pressione, si desume che:

$$c_p = \frac{dh}{dT} \Rightarrow \Delta H_{12} = m\Delta h_{12} = m \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$$

Essendo costante per ipotesi il c_p dell'aria (tale approssimazione è in generale accettabile per variazioni ridotte di temperatura, se si utilizza il valore medio di c_p nell'intervallo di variazione), il calore complessivamente scambiato durante la trasformazione in esame si può valutare come segue:

$$\begin{aligned} Q_{12} = \Delta H_{12} &= m \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \cong m c_{p,\text{medio}} (T_2 - T_1) = \\ &= 0.0279 \cdot 1052 \cdot (800 - 300) = 14662 \text{ J} = 14.7 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Il risultato è positivo, per cui il calore è assorbito dal fluido.

– Commenti

Le condizioni di pressione e temperatura sono tali che l'aria può considerarsi un gas ideale durante tutta la trasformazione.

Per un sistema semplice, il primo principio può essere formulato in modi diversi:

$$dU = \delta Q - \delta L = \delta Q - p dV \Leftrightarrow dH = d(U + pV) = \delta Q + V dp$$

C.VI. Trasformazione isobara di gas reale

– Problema

Una quantità di vapore d'acqua surriscaldato, inizialmente a temperatura 1000°C e volume specifico 0.0196 m³/kg, subisce una trasformazione isobara, al termine della quale si trova a 505°C. Determinare la pressione iniziale e il volume specifico finale.

– Dati

Sostanza: acqua

$$T_1 = 1000^\circ\text{C} = 1273 \text{ K}$$

$$v_1 = 0.0196 \text{ m}^3/\text{kg}$$

1→2) Trasformazione isobara $\Rightarrow p_2 = p_1$

$$T_2 = 505^\circ\text{C} = 778 \text{ K}$$

– Determinare

Pressione iniziale (p_1), volume specifico finale (v_2).

– Ipotesi

(Gas reale).

– Soluzione

La costante di gas perfetto dell'acqua si ricava da tabella:

$$R = 0.4615 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 461.5 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

La pressione iniziale, coincidente con quella finale poiché la trasformazione è isobara, si ricava tramite l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_1 \equiv p_2 = RT_1 / v_1 = 29.9 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 29.9 \text{ MPa}$$

Per verificare se si ha a che fare con un gas ideale, si devono verificare i valori di temperatura ridotta e pressione ridotta. A tal riguardo, si ricava da tabella che la temperatura e la pressione di punto critico dell'acqua sono pari a:

$$p_c = 22.09 \text{ MPa} = 22.09 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$T_c = 647.3 \text{ K}$$

La temperatura ridotta e la pressione ridotta nello stato iniziale sono pari a:

$$p_{r,1} = p_1 / p_c = 1.357$$

$$T_{r,1} = T_1 / T_c = 1.967$$

Tali valori sono con buona approssimazione compatibili con l'ipotesi di gas ideale ($T \geq 2T_c$). Il valore stimato per la pressione iniziale può quindi ritenersi attendibile.

Al termine della trasformazione (isobara) si ha, invece:

$$p_{r,2} \equiv p_{r,1} = 1.357$$

$$T_{r,2} = T_2 / T_c = 1.202$$

Tali valori non sono compatibili con l'ipotesi di gas ideale. Occorre quindi, per determinare il volume specifico finale, determinare il fattore di compressibilità tramite gli appositi diagrammi. Se ne ricava:

$$Z_2 = Z_2(p_{r,2}, T_{r,2}) = 0.71$$

Il volume specifico finale si può ora determinare mediante l'equazione di stato dei gas reali:

$$v_2 = Z_2 RT_2 / p_2 = 0.00851 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

C.VII. Trasformazione politropica di gas ideale

– Problema

Una quantità di metano, inizialmente a pressione 1.00 bar e temperatura 27°C, subisce una trasformazione politropica con esponente della trasformazione 1.3, al termine della quale la pressione è stata innalzata a 2.50 bar.

Determinare il volume specifico iniziale, la temperatura finale e il lavoro specifico scambiato.

– Dati

Sostanza: metano

$$p_1 = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$$

$$1 \rightarrow 2) \text{ Trasformazione politropica} \Rightarrow p_2 v_2^n = p_1 v_1^n$$

$$n = n_{1 \rightarrow 2} = 1.3$$

$$p_2 = 2.50 \text{ bar} = 2.50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

– Determinare

Volume specifico iniziale (v_1) e temperatura finale (T_2) del metano, lavoro specifico scambiato (l_{12}).

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

La pressione ridotta $p_r = p/p_c$ si mantiene sempre $\ll 1$, tale quindi da poter considerare il gas perfetto. La costante di gas perfetto del metano si ricava da tabella:

$$R = 0.5182 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 518.2 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Il volume specifico iniziale può essere determinato mediante l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$v_1 = RT_1 / p_1 = 1.555 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Il volume specifico finale si calcola sfruttando l'equazione della politropica:

$$v_2 = v_1 (p_1/p_2)^{1/n} = 0.769 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

La temperatura al termine della trasformazione è calcolata mediante l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$T_2 = p_2 v_2 / R = 371 \text{ K} = 98^\circ\text{C}$$

Il lavoro specifico scambiato durante una trasformazione politropica di gas ideale può essere calcolato come segue:

$$l_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \int_{v_1}^{v_2} p v^n \frac{dv}{v^n} = (p v^n)_{1,2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^n} = (p v^n)_{1,2} \frac{v_2^{1-n} - v_1^{1-n}}{1-n} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1-n}$$

Nel caso in esame, si ottiene:

$$\ell_{12} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{1 - n} = \frac{2.50 \cdot 10^5 - 1.00 \cdot 10^5}{1 - 1.3} = -122082 \text{ J} = -122 \text{ kJ/kg}$$

Il risultato è negativo, perciò il lavoro è fornito al fluido.

– Commenti

Il lavoro totale si calcola moltiplicando il lavoro specifico per la massa di fluido processata, oppure mediante la relazione:

$$L_{12} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1 - n}$$

Un caso particolare di trasformazione politropica è la trasformazione adiabatica, in cui l'esponente n è pari al rapporto tra i calori specifici a pressione costante e volume costante del fluido processato.

C.VIII. * Ciclo chiuso di un gas ideale

– Problema

Una quantità di aria subisce un processo ciclico che prevede, nell'ordine, una trasformazione isocora, una trasformazione isoterma e una trasformazione isobara. Inizialmente l'aria è caratterizzata da volume 0.500 L, pressione 1.00 bar e temperatura 27°C, mentre al termine della prima trasformazione la pressione sale a 7.00 bar.

Determinare la massa dell'aria e pressione, volume specifico e temperatura al termine di ogni trasformazione. Inoltre, rappresentare qualitativamente il ciclo su un diagramma p-v.

– Dati

1→2) Trasformazione isocora $\Rightarrow v_2 = v_1$ ($V_2 = V_1$)

2→3) Trasformazione isoterma $\Rightarrow T_3 = T_2$

3→1) Trasformazione isobara $\Rightarrow p_1 = p_3$

$V_1 \equiv V_2 = 0.500 \text{ L} = 0.500 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$p_1 \equiv p_3 = 1.00 \text{ bar} = 1.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$T_1 = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$

$p_2 = 7.00 \text{ bar} = 7.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

– Determinare

$m, v_1, v_2, T_2, p_3, v_3, T_3.$

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

La costante di gas perfetto dell'aria secca si ricava da tabella:

$$R = 0.2870 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 287.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

L'equazione di gas perfetto restituisce il seguente valore del volume specifico iniziale:

$$v_1 = RT_1 / p_1 = 0.861 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

La massa d'aria processata vale pertanto:

$$m = V_1 / v_1 = 0.000580 \text{ kg} = 580 \text{ mg}$$

Per la temperatura alla fine della trasformazione isocora ($v_2 = v_1$) si ha che:

$$T_2 = p_2 v_2 / R = 2101 \text{ K}$$

Lo stato al termine della seconda trasformazione è caratterizzato dal fatto che tale trasformazione è isoterma ($T_3 = T_2$), mentre la trasformazione che riporta l'aria allo stato iniziale è isobara ($p_3 = p_1$). Il volume specifico è infine dato dalla relazione:

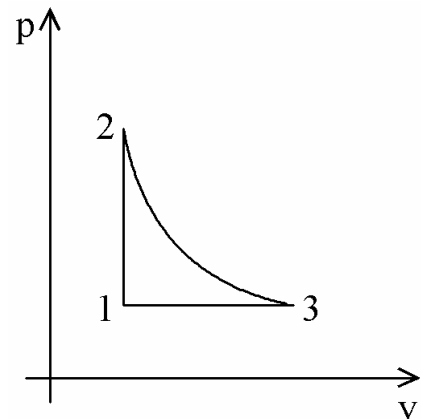
$$v_3 = RT_3 / p_3 = 6.03 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

Il volume finale è pari a:

$$V_3 = m v_3 = 0.0035 \text{ m}^3$$

I valori delle proprietà termodinamiche richieste sono raccolti nella tabella seguente:

Posizione	p (Pa)	v (m ³ /kg)	T (K)
1	1.00·10 ⁵	0.861	300
2	7.00·10 ⁵	0.861	2101
3	1.00·10 ⁵	6.03	2101



La rappresentazione qualitativa del ciclo nel diagramma p-v è quella riportata accanto.

– Commenti

Note le trasformazioni e gli stati all'inizio e alla fine di queste, è possibile valutare il lavoro ed il calore scambiati nelle varie fasi del ciclo e, quindi, determinarne i rendimenti.

C.IX. * Ciclo chiuso di un gas ideale (2)

– Problema

Una quantità di idrogeno (H₂) subisce un processo ciclico che prevede, nell'ordine, una trasformazione politropica con esponente 1.1, una trasformazione adiabatica ed una trasformazione isobara. Inizialmente, l'idrogeno è caratterizzato da temperatura –35°C, mentre al termine della prima trasformazione la temperatura sale a –20°C e la densità è pari a 0.040 kg/m³.

Si determinino pressione, volume specifico e temperatura al termine di ogni trasformazione. Si rappresenti qualitativamente il ciclo su un diagramma p-v.

– Dati

1→2) Trasformazione politropica ⇒ $p_2 v_2^n = p_1 v_1^n$

$n \equiv n_{1 \rightarrow 2} = 1.1$

2→3) Trasformazione adiabatica

3→1) Trasformazione isobara $\Rightarrow p_1 = p_3$

$$T_1 = -35^\circ\text{C} = 238 \text{ K}$$

$$T_2 = -20^\circ\text{C} = 253 \text{ K}$$

$$\rho_2 = 0.040 \text{ kg/m}^3$$

$$p_2 = 7.00 \text{ bar} = 7.00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

– Determinare

$$p_1, v_1, p_2, v_2, p_3, v_3, T_3.$$

– Ipotesi

Gas ideale.

– Soluzione

La costante di gas perfetto dell'idrogeno si ricava da tabella:

$$R = 4.1240 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 4124.0 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Il volume specifico al termine della prima trasformazione è pari a:

$$v_2 = 1/\rho_2 = 25.0 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Il volume specifico all'inizio della prima trasformazione si può stimare tenendo presente che la trasformazione è politropica. Si ha pertanto che:

$$v_1 = v_2 (T_2/T_1)^{1/(n-1)} = 46.05 \text{ m}^3/\text{kg}$$

La pressione all'inizio della prima trasformazione vale:

$$p_1 = RT_1/v_1 = 21328 \text{ Pa} = 21.3 \text{ kPa}$$

La pressione al termine della prima trasformazione vale:

$$p_2 = RT_2/v_2 = 41760 \text{ Pa} = 41.8 \text{ kPa}$$

Il volume specifico al termine della seconda trasformazione può essere ricavato considerando che tale trasformazione è adiabatica e, quindi, caratterizzata dalla relazione:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$

in cui k è il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante dell'idrogeno. I valori di tali proprietà si ricavano da tabella e valgono, rispettivamente:

$$c_p = 14.307 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

$$c_v = 10.183 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Il loro rapporto è pari a:

$$k = c_p/c_v = 1.405$$

Pertanto, si ottiene:

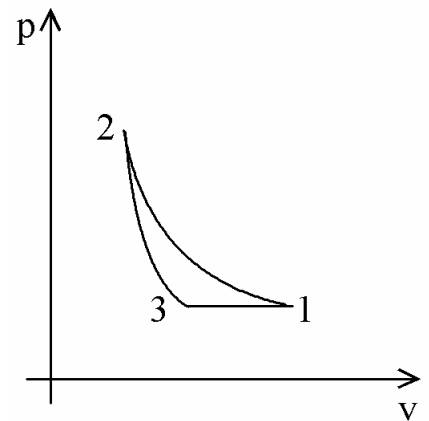
$$v_3 = v_2 (p_2/p_3)^{1/k} = 40.3 \text{ m}^3/\text{kg}$$

Infine, si ha che:

$$T_3 = p_3 v_3 / R = 209 \text{ K}$$

I valori delle proprietà richieste sono raccolti nella tabella sottostante:

Posizione	p (kPa)	v (m ³ /kg)	T (K)
1	21.3	46.0	238
2	41.8	25.0	253
3	21.3	40.3	209



La rappresentazione qualitativa del ciclo nel diagramma p-v è quella riportata accanto.

C.X. Calore specifico di un materiale solido

– Problema

Ai fini dell'applicazione di un trattamento termico, la temperatura di un manufatto con massa 3.4 kg deve essere portato dal valore ambiente, pari a 27°C, fino a 640°C. Il manufatto è realizzato in una lega metallica, il cui calore specifico è pari a 480 J/(kg·°C). Il processo di riscaldamento avviene in atmosfera. Stimare il calore da fornire al componente.

– Dati

$m_m = 3.4 \text{ kg}$
 $c_m = 480 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$
 $T_i = 27\text{°C}$
 $T_f = 640\text{°C}$

– Determinare

Calore da fornire (Q).

– Ipotesi

Proprietà indipendenti dalla temperatura, trasformazione isobara.

– Soluzione

Il primo principio della termodinamica permette di formulare la seguente relazione:

$$\Delta H = Q + \int_{P_i}^{P_f} V dp$$

Non avendo alcuna indicazione in contrario, è lecito assumere costante la pressione atmosferica e, di conseguenza, considerare isobaro il processo di riscaldamento del manufatto in esame, che avviene in atmosfera. Pertanto, l'integrale a secondo membro nell'equazione precedente è nullo, e il calore da fornire al componente metallico vale:

$$Q = \Delta H = m_m \int_{T_i}^{T_f} c_m(T) dT \cong m c_{m,medio} (T_f - T_i) = 3.4 \cdot 480 \cdot (640 - 27) = 1.00 \cdot 10^6 \text{ J} = 1.00 \text{ MJ}$$

– Commenti

Il calore specifico a pressione costante dei materiali solidi è praticamente coincidente con quello a volume costante. Lo stesso vale per i liquidi.

Valutare una differenza di temperatura in celsius o in kelvin produce lo stesso risultato.

C.XI. Calore specifico di solidi e liquidi– Problema

Si consideri il manufatto in lega metallica di cui al problema precedente, caratterizzato da massa 3.4 kg e calore specifico 480 J/(kg·°C). Il trattamento termico a cui deve essere sottoposto prevede che, dopo essere stato portato alla temperatura di 640°C, venga immerso repentinamente in una vasca che contiene 220 L di un olio speciale, resistente alle alte temperature. Sapendo che la densità e il calore specifico dell'olio sono rispettivamente pari a 950 kg/m³ e 2600 J/(kg·°C), e che la sua temperatura iniziale è uguale a quella ambiente, pari a 27°C, determinare la temperatura finale del bagno. Si trascurino la capacità termica delle pareti della vasca ed il calore scambiato attraverso di esse.

– ati

$$m_m = 3.4 \text{ kg}$$

$$c_m = 480 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$$

$$T_m = 640\text{°C}$$

$$V_o = 220 \text{ L} = 0.220 \text{ m}^3$$

$$\rho_o = 950 \text{ kg/m}^3$$

$$c_o = 2600 \text{ J/(kg}\cdot\text{°C)}$$

$$T_o = 27\text{°C}$$

– Determinare

Temperatura finale del bagno (T_f).

– Ipotesi

Proprietà indipendenti dalla temperatura, trasformazione isobara, pareti della vasca adiabatiche e con capacità termica nulla.

– Soluzione

La massa di olio nella vasca è pari a:

$$m_o = \rho_o V_o = 209 \text{ kg}$$

Poiché la vasca è aperta all'atmosfera, le trasformazioni al suo interno sono isobare. Inoltre, non viene scambiata con l'esterno né materia, né energia. Ne consegue che l'entalpia finale del sistema manufatto-olio debba essere identica a quella iniziale:

$$\Delta H = Q + \int_{P_i}^{P_f} V dp = 0$$

Inoltre, l'entalpia acquisita dall'olio (in termini di calore sensibile durante il riscaldamento dalla temperatura iniziale T_o a quella finale T_f , incognita) deve essere in valore assoluto pari a quella ceduta dal manufatto (in termini di calore sensibile di raffreddamento dalla temperatura iniziale T_m a quella finale T_f , che per l'equilibrio termico è uguale a quella finale dell'olio). In termini matematici, si deve avere che:

$$\Delta H = \Delta H_o + \Delta H_m = 0 \Rightarrow \Delta H_o = -\Delta H_m$$

ovvero

$$m_o c_o (T_f - T_o) = -m_m c_m (T_f - T_m)$$

Risolviendo l'equazione rispetto all'unica incognita, la temperatura finale T_f , si ottiene:

$$T_f = \frac{m_o c_o T_o + m_m c_m T_m}{m_o c_o + m_m c_m} = 28.8^\circ\text{C}$$

– Commenti

In virtù della notevole quantità di olio impiegata, la temperatura finale del bagno rimane pressoché costante.

C.XII. Calore specifico di solidi e liquidi e calore latente di fusione

– Problema

Tra le varie prove di omologazione che devono essere superate da un flight data recorder (FDR) per aeromobili, comunemente detto “scatola nera”, vi è la prova a fuoco. Questa prevede che i dispositivi in cui sono memorizzati i dati acquisiti durante il volo rimangano indenni dopo che l’FDR è stato sottoposto ad un flusso termico di 10 kW/m^2 per un periodo di 30 minuti. Si tratta della prova più gravosa, che può essere superata solo annegando l’elettronica in una cera o altro materiale a cambiamento di fase, che assorba buona parte del calore fondendo a bassa temperatura e rimanendo chimicamente stabile fino a temperature elevate.

L’FDR in esame presenta sviluppo superficiale esterno pari a 0.22 m^2 e temperatura di esercizio 25°C , ed impiega componenti elettroniche in grado di sostenere indenni temperature di 120°C . L’elettronica, la cui capacità termica è trascurata in favore di sicurezza, viene annegata in una cera che presenta calore specifico $1.8 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ in fase solida e $2.5 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ in fase liquida, temperatura di fusione 105°C e calore latente di fusione/solidificazione 242 kJ/kg . Determinare la massa minima di cera teoricamente necessaria a superare la prova a fuoco.

– Dati

$$q'' = 10 \text{ kW/m}^2 = 10000 \text{ W/m}^2$$

$$t_{if} = 30 \text{ min} = 1800 \text{ s}$$

$$A = 0.22 \text{ m}^2$$

$$T_i = 25^\circ\text{C}$$

$$T_f \equiv T_{\max} = 120^\circ\text{C}$$

$$c_s = 1.8 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C}) = 1800 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

$$c_l = 2.5 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C}) = 2500 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$$

$$T_{sl} = 105^{\circ}\text{C}$$

$$q_{sl} = 242 \text{ kJ/kg} = 242000 \text{ J/kg}$$

– Determinare

Massa della cera (m).

– Ipotesi

Proprietà indipendenti dalla temperatura.

– Soluzione

Il riscaldamento subito dalla cera avviene a pressione pressoché costante, dato che sono generalmente previste aperture di sfogo dei gas eventualmente liberati. Gli scambi di materia con l'esterno sono peraltro limitati all'espulsione delle fasi gassose e si possono quindi considerare trascurabili. Sulla base del primo principio della termodinamica si può quindi asserire che:

$$\Delta H = Q_{if}$$

ovvero, per unità di massa di cera,

$$\Delta h = Q_{if} / m = q_{if}$$

Assumendo che i calori specifici delle varie fasi della cera protettiva siano indipendenti dalla temperatura, il calore complessivamente assorbito dall'unità di massa di cera per portarsi dalla temperatura iniziale di 25°C (valore di esercizio) alla temperatura finale di 120°C (valore massimo ammissibile dall'elettronica) è pari a:

$$q_{if} = c_s (T_{sl} - T_i) + q_{sl} + c_l (T_f - T_{sl}) = 423'500 \text{ J/kg}$$

Assumendo poi che il flusso termico interessi tutta la superficie esterna del flight data recorder e che si mantenga costante per tutto il periodo temporale considerato (ciò va in realtà in favore di sicurezza poiché il flusso termico tende a diminuire con l'aumentare della temperatura superficiale esterna), l'energia complessivamente apportata durante la prova a fuoco vale:

$$Q_{if} \equiv q'' A t_{if} = 10'000 \cdot 0.22 \cdot 1800 = 3'960'000 \text{ J} = 3.96 \text{ MJ}$$

In definitiva, la minima massa di cera in cui annegare l'elettronica è pari a:

$$m = \frac{\Delta H}{\Delta h} = \frac{Q_{if}}{q_{if}} = \frac{3'960'000}{423'500} = 9.35 \text{ kg}$$

– Commenti

Si noti che la maggior parte del calore è assorbita dal processo di fusione della cera:

$$\frac{q_{sl}}{q_{if}} = \frac{242'000}{423'500} = 0.57 = 57\%$$

Inoltre, poiché il fronte di fusione si propaga dall'esterno verso l'interno, la temperatura dell'elettronica aumenterà al più fino alla temperatura di fusione della cera fintantoché quest'ultima non si sarà completamente liquefatta.

In corrispondenza degli spigoli si verificano flussi termici maggiori che altrove. Occorre perciò aumentare localmente lo spessore dello strato di cera protettiva, oppure, come è prassi nel settore, adottare geometrie che non prevedano spigoli (involucri cilindrici o sferici).

C.XIII. Calore specifico di solidi e liquidi e calore latente di fusione: bibita con ghiaccio

– Problema

In un recipiente non sigillato che contiene 200 cl di una bibita a base acqua, inizialmente a temperatura ambiente pari a 30°C, vengono inseriti 21 g di ghiaccio a temperatura –12°C, che dopo un certo tempo si liquefa completamente. La densità iniziale della fase liquida è pari a 1 kg/dm³. Il calore specifico della bibita vale 2.04 kJ/(kg·°C) per la fase solida e 4.19 kJ/(kg·°C) per la fase liquida. La transizione solido-liquido ha luogo a 0°C ed il calore latente di liquefazione ad essa associato è pari a 334 kJ/kg. Trascurando la capacità termica della piccola massa di aria che è inevitabilmente presente nel recipiente ed assumendo che le pareti del recipiente siano termicamente isolate, determinare la temperatura finale di equilibrio della bibita.

– Dati

$$V_l = 200 \text{ cl} = 200 \text{ cm}^3 = 2.00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$T_l = 30^\circ\text{C}$$

$$m_s = 21 \text{ g} = 0.021 \text{ kg}$$

$$T_s = -12^\circ\text{C}$$

$$\rho_b = 1 \text{ kg/dm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$c_s = 2.04 \text{ kJ/(kg}\cdot^\circ\text{C)} = 2040 \text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$$

$$c_l = 4.19 \text{ kJ/(kg}\cdot^\circ\text{C)} = 4190 \text{ J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$$

$$q_{sl} = 334 \text{ kJ/kg} = 334 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

$$T_{sl} = 0^\circ\text{C}$$

– Determinare

Temperatura finale di equilibrio (T_f).

– Ipotesi

Proprietà indipendenti dalla temperatura, pareti del recipiente adiabatiche, capacità termica dell'aria nel recipiente trascurabile.

– Soluzione

Poiché il recipiente è aperto all'atmosfera, le trasformazioni al suo interno sono isobare. Inoltre, non viene scambiata con l'esterno né materia, né energia. Pertanto, l'entalpia finale del sistema bibita-ghiaccio deve essere identica a quella iniziale:

$$\Delta H = Q + \int_{P_i}^{P_f} V dp = 0$$

Ne consegue che l'entalpia acquisita dal ghiaccio (in termini di calore sensibile durante il riscaldamento dalla temperatura iniziale T_s a quella di fusione T_{sl} , di calore latente di fusione durante la transizione di fase e, infine, di calore sensibile durante il riscaldamento dalla temperatura di fusione T_{sl} a quella finale T_f , incognita) deve essere in valore assoluto pari a quella ceduta dal liquido (calore sensibile di raffreddamento dalla temperatura iniziale T_l a quella finale T_f , che, in virtù dell'equilibrio termico, è uguale a quella finale del ghiaccio liquefatto). In termini matematici, si deve avere che:

$$\Delta H = \Delta H_s + \Delta H_1 = 0 \Rightarrow \Delta H_s = -\Delta H_1$$

ovvero

$$m_s [c_1 (T_f - T_{sl}) + q_{sl} + c_s (T_{sl} - T_s)] = -m_1 c_1 (T_f - T_1)$$

Risolvendo l'equazione rispetto all'unica incognita, la temperatura finale T_f , si ottiene:

$$T_f = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_s c_s T_s + m_s c_1 T_{sl} - m_s c_s T_{sl} - m_s q_{sl}}{m_1 c_1 + m_s c_1} = 19.0^\circ\text{C}$$

– Commenti

L'ipotesi di adiabaticità delle pareti è in realtà piuttosto forte, specie se il recipiente presenta pareti sottili in materiale plastico e non è chiuso superiormente da un coperchio. Il risultato è quindi da considerarsi accettabile solo in prima approssimazione.

Se si introducessero nel recipiente anche 5 g di zucchero, caratterizzato da calore specifico $c_z = 1.3 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ e temperatura iniziale uguale a quella della bibita (30°C), si otterrebbe che:

$$\Delta H = \Delta H_s + \Delta H_1 + \Delta H_z = 0 \Rightarrow \Delta H_s = -\Delta H_1 - \Delta H_z$$

ovvero

$$m_s [c_1 (T_f - T_{sl}) + q_{sl} + c_s (T_{sl} - T_s)] = -(m_1 c_1 + m_z c_z)(T_f - T_1)$$

Risolvendo l'equazione rispetto all'unica incognita, la temperatura finale T_f , si ottiene:

$$T_f = \frac{(m_1 c_1 + m_z c_z) T_1 + m_s c_s T_s + m_s c_1 T_{sl} - m_s c_s T_{sl} - m_s q_{sl}}{(m_1 c_1 + m_z c_z) + m_s c_1} = 19.1^\circ\text{C}$$

La variazione è pressoché trascurabile.